Fonctions logarithmes

La fonction logarithme népérienne $f(x)=\ln x$

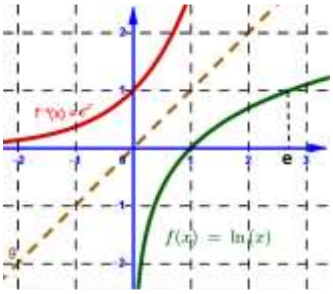
- $D_f=]0,+\infty[$, continue et dérivable sur $D_f=]0,+\infty[$ avec $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$
- $\ln 1=0$, $\ln e=1$ avec $e\approx 2{,}718...$ e est un nombre irrationnel .

$a>0$ et $b>0$ et $r\in\mathbb{Q}$

- $\ln ab=\ln a+\ln b$, $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right)=-\ln a$, $\ln\dfrac{a}{b}=\ln a-\ln b$, $\ln a^r=r\ln a$
- $\forall a,b\in]0,+\infty[,\ln(a)=\ln(b)\Leftrightarrow a=b$
- $\forall a,b\in]0,+\infty[,a<b\Leftrightarrow \ln(a)<\ln(b)$

Signe de ln(x)

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

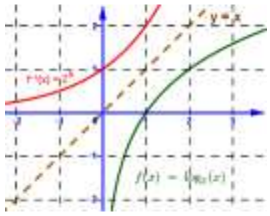


- $f(x)=\ln(u(x))$, $x\in D_f\Leftrightarrow(x\in D_u$ et $u(x)>0)$
- $f'(x)=\left[\ln|u(x)|\right]'=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ donc primitives de $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ sont $F(x)=\ln|u(x)|+c$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to0^+}x\times\ln(x)=0^-$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^n}=0$	$\lim\limits_{x\to0^+}x^n\times\ln(x)=0^-$
$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(x)}{x-1}=1$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=1$	

Logarithmes de base a

Logarithmes de base a : $a\in]0,1[\cup]1,+\infty[$ $r\in\mathbb{Q}$



- $f(x)=\log_a(x)=\dfrac{\ln x}{\ln a}$, $a\in]0,1[\cup]1,+\infty[$; $\log_e(x)=\dfrac{\ln(x)}{\ln(e)}=\ln(x)$
- $a=10$ donc $\log_{10}(x)=\mathrm{Log}(x)$ (logarithme décimale)
- $\log_a(x\times y)=\log_a(x)+\log_a(y)$ et $\log_a(x^r)=r\times\log_a(x)$
- $\log_a\left(\dfrac{1}{y}\right)=-\log_a(y)$ et $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right)=\log_a(x)-\log_a(y)$

$f(x)=a^x$

Les fonctions exponentielles de base a

est : $f(x)=a^x=e^{x\ln a}$

$a\in]0,1[\cup]1,+\infty[$ $r\in\mathbb{Q}$

$\forall x,y\in\mathbb{R}$

$a^x\times a^y=a^{x+y}$; $(a^x)^y=a^{x\times y}$

$\dfrac{1}{a^x}=a^{-x}$; $\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$

- $0<a<1$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$

  $a^x<a^y\Leftrightarrow x>y$
- $a>1$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$

  $a^x<a^y\Leftrightarrow x<y$

$(a^x)'=(\ln(a))\times a^x$

Rq : $f(x)=a^x=e^{x\ln a}$

La fonction exponentielle népérienne $f(x)=e^x$

- La fonction réciproque de $x\mapsto\ln x$ est la fonction $x\mapsto e^x$ définie de $\mathbb{R}\to]0,+\infty[$ .donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^x>0$.
- $D_f=\mathbb{R}$, continue et dérivable sur $D_f=\mathbb{R}$ avec $(e^x)'=e^x$
- $f(x)=e^{u(x)}$, $x\in D_f\Leftrightarrow x\in D_u$
- $f'(x)=\left[e^{u(x)}\right]'=u'(x)e^{u(x)}$ donc primitives de $u'(x)e^{u(x)}$ sont $F(x)=e^{u(x)}+c$

$\left.\begin{matrix}e^x=y\\x\in\mathbb{R}\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}x=\ln y\\y>0\end{matrix}\right.$	$\forall x\in\mathbb{R}$, $\ln(e^x)=x$	$\forall x\in]0,+\infty[$, $e^{\ln x}=x$
$e^{a+b}=e^a\times e^b$	$e^{-b}=\dfrac{1}{e^b}$, $e^{a-b}=\dfrac{e^a}{e^b}$	$(e^x)^r=e^{rx}$, $e^x\times e^x=e^{2x}$
$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0^+$	$\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$	$\underbrace{e^x\times e^x\times\cdots\times e^x}_{n}=(e^x)^n=e^{nx}$
$\lim\limits_{x\to-\infty}x\times e^x=0^-$	$\lim\limits_{x\to-\infty}x^n\times e^x=0$; $n\in\mathbb{N}^*$	
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^n}=+\infty$; $n\in\mathbb{N}^*$	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$